Cubo de Rubik

Jesica R. Julita, Vanesa A. Viejo
UTN FRBA (Universidad Tecnológica Nacional Regional Buenos Aires)

Resumen. El Cubo de Rubik fue inventado en 1974 por el profesor húngaro Erno Rubik. El propósito fue explicar a sus alumnos el concepto de volumen y espacio. Luego, este juego de ingenio se hizo tan famoso que fue lanzado comercialmente. El objetivo es restaurar el cubo a su condición original. Se debe rotar cada uno de sus lados para ir llevando cada pieza a su correcta ubicación, logrando, en cada cara, un único color. Con la Investigación Operativa y la Simulación, se planteó un modelo matemático para resolver un cubo 3x3x3 desarmado a partir de una mezcla y algoritmos de resolución (Pensados como restricciones). Se resalta la relevancia de la Investigación Operativa para la toma de decisiones, especialmente para la optimización. El método Simplex permitió obtener los resultados del problema basados en la programación lineal. Después de investigar y probar el modelo variando las restricciones y la disponibilidad mínima de cada cara y/o de los algoritmos del método Fridrich para la resolución del Cubo de Rubik, se concluyo que, bajo las condiciones del sistema planteado, la solución óptima es exactamente la inversa de la mezcla propuesta, sin reducir a cero la cantidad de giros de una o más caras.

Palabras Claves: Cubo de Rubik; mezcla; optimización; programación lineal; y Simulación.

1 Introducción

A grandes rasgos, el cubo de Rubik es un bloque cúbico con su superficie subdividida de modo que cada cara consiste en nueve cuadrados. Cada cara se puede rotar, dando el aspecto de una rebanada entera del bloque que rota sobre sí mismo. Esto da la impresión de que el cubo está compuesto de 27 cubos más pequeños.

En su estado original, cada cara del cubo es de un color, pero la rotación de cada una de estas permite que los cubos más pequeños sean combinados de muchas maneras. Tal es así que el cubo puede tener más de 43 trillones de diversas posiciones.

Existen variaciones al clásico cubo. Algunas con otro número distinto de cuadrados por cara y otros con diferentes formas (Por ejemplo, el Pyraminx con forma piramidal). Las principales versiones que hay son las siguientes: el 2×2×2 (Cubo de bolsillo), el 3×3×3 que es el cubo de Rubik estándar (Utilizado en el presente Trabajo), el 4×4×4 (La venganza de Rubik), el 5×5×5 (El Cubo del Profesor) y desde Septiembre de 2008 el 6×6×6 (V-Cube 6) y el 7×7×7 (V-Cube 7). La empresa Shengshou lanzó al mercado, a principios de 2012, cubos de 8x8x8 y 9x9x9. Luego, se incorporó 10x10x10, 11x11x11 y 12x12x12. Recientemente, la marca MoYu (YJ) lanzó al mercado un cubo 13x13x13.[8] **(Ver Referencias al final del Trabajo)**

El objetivo básico de este juego de ingenio es restaurar el cubo a su condición original. Se deben utilizar las diferentes rotaciones que el cubo permite, en cada uno de sus lados, para ir llevando cada pieza de éste, a su correcta ubicación, logrando así que cada cara sea de un único color.

Se eligió trabajar con el cubo de Rubik ya que consideramos que es un tema interesante y aplicable a la programación lineal junto con herramientas de Simulación. Además, se contaba con la información necesaria para hacer el modelo matemático y la experiencia de una aficionada de SpeedCubing (Que es la actividad de armar el Cubo de Rubik cronometrado).

1.1 Objetivos a cumplir por la Investigación Operativa

Se sabe que la programación lineal utiliza modelos matemáticos, estadísticos y algoritmos para modelar y resolver problemas complejos, determinando así la solución óptima y mejorando la toma de decisiones. Así, a través de la disciplina de la Investigación Operativa, se puede definir formalmente el problema, llegando a formular un modelo matemático que represente la realidad del problema planteado (Optimización para el armado del Cubo Rubik).

Una vez modelado el sistema, se dispone varias herramientas para su resolución y posterior análisis y/o ajuste, tales como el Método Simplex. En este caso, se usará un Software de aplicación (WinQSB[3]) que nos servirá de apoyo para plantearlo desde el Método Simplex.

De este modo, poder encontrar alguna secuencia lógica que logre la cantidad de movimientos mínimos para armar el cubo de Rubik. Es decir, que para un cubo estándar (3x3x3) y para una mezcla determinada, se deberá encontrar la secuencia óptima para llegar a un cubo ordenado.

Tras finalizar este Trabajo, se conocerá la solución óptima matemáticamente de la menor cantidad de movimientos para resolver el cubo.

2 Modelización del problema presentado

Consideraciones del Modelo General

Después de haber evaluado exhaustivamente la modelización del problema en las primeras instancias del Trabajo de investigación, se descartó la posibilidad de tener coeficientes económicos distintos a 1 (Uno) ya que, por la naturaleza de la definición de las variables de estudio, no se encontró una relación entre ellas que se corresponda siempre a una posible resolución (Solve) de una mezcla (Scramble).

Cada mezcla elegida cumple con las normativas de WCA[4] (Fueron generadas con el cronometro[1]). Cada mezcla oficial tiene al menos 27 movimientos, con lo cual se tuvo en cuenta este mínimo para facilitar el análisis matemático del problema. Se calculó los movimientos de cada cara de las mezclas presentadas, verificando que el total de movimientos esté incluido en esta restricción.

El método Fridrich propone resolver el Cubo de Rubik de la siguiente manera:

1. **Cruz**: Hay que armar una cruz en una cara, haciendo coincidir los centros con los lados de cada una de las aristas. La cara elegida generalmente es la cara Blanca.
2. **F2L** (First two layers): Luego, hay que colocar cada una de las esquinas en su ubicación correcta y su arista correspondiente. Así, ya se tiene correctamente armadas la primera capa y la segunda capa.
3. **OLL** (Orientation of the Last Layer): Se debe armar la cara completa de arriba. En este caso, la cara opuesta al blanco es la cara Amarilla.
4. **PLL** (Permutation of the Last Layer): Ordenar las piezas de la última capa.

La cantidad mínima de movimientos de cada uno de los pasos a seguir para resolver el Cubo de Rubik se determinó en base a las recomendaciones estadísticas de quienes resuelven el cubo con un tiempo promedio de 20 segundos (Los llamados "Sub20") y la cantidad de movimientos de cada uno de los algoritmos para resolver esos pasos. Para ello, se consideró también el promedio de la cantidad de movimientos para hacer cada paso, de una persona que hizo el cubo en 86 movimientos; otra, en 60 movimientos y otra, en 43 movimientos.

La información estadística mencionada anteriormente es en base a un promedio de resolución de cada parte del método Fridrich de quienes se tomaron muestras (3 personas con distinto promedio de tiempo de resolución, es decir que cada uno tiene su manera de resolver el cubo siempre en base a los algoritmos del método Fridrich; uno más rápido que otro, pero todos utilizan el método Fridrich) y en base a las buenas estrategias y la habilidad del solver (Quien resuelve el cubo cronometrado) para resolverlo en menor tiempo un caso de Cruz, F2L, OLL o PLL.

En las restricciones, se consideró la cantidad mínima de movimientos para cada una las combinaciones de las caras opuestas y de las caras adyacentes.

Debido a que, mediante el modelo, no se podía plantear que la combinación de la solución fuera efectivamente un cubo ordenado fue necesaria la utilización no solo de Software de la materia WinQSB[3], sino también la ayuda del Software de simulación Cube Explorer 5.12 HTM[2], diseñado especialmente para, a partir de una mezcla, obtener las resoluciones de menor cantidad de movimientos. En el mismo, se ingresa una mezcla, y basándose en el mismo algoritmo antes nombrado, devuelve las soluciones algorítmicas de menor cantidad movimientos. Lo que se hizo fue contar por cada color para facilitar nuestro análisis (Dando entre 20 y 31 movimientos para las mezclas elegidas).

La resolución de los modelos presentados en este Trabajo es en base al promedio de las secuencias de menor cantidad de movimientos que aporta el programa de simulación, que utiliza algoritmos del método Fridrich y otros atajos matemáticos. No se citaron ya que se considera que no aporta datos relevantes a la resolución que brinda el modelo matemático de la Programación Lineal (Resuelto por el WinQSB). Además, representa una dificultad extra en modelizar cada secuencia posible bajo la Programación Lineal ya que se pierde claridad y simplicidad de entendimiento.

2.1 Condiciones del Modelo General

Para el desarrollo del Trabajo, se utilizará un cubo de Rubik estándar (3x3x3) que posee 6 (seis) colores distintos. Está conformado por 12 aristas, 8 esquinas y 6 centros.

La mezcla (Scramble), utilizada en los torneos oficiales de la WCA (World Cube Association), consta de aproximadamente 20 grupos de movimientos[6] con la cara blanca hacia arriba y con la cara verde hacia el frente. Cada grupo de movimientos está formado por una letra y un número multiplicador. Entonces, para facilitar el análisis, los grupos de movimientos se desglosan y se cuentan como el total de movimientos que representan. Es decir, una mezcla oficial consta de aproximadamente 27 movimientos.

2.2 Condiciones del Modelo 1

La **mezcla 1**, generada por el cronometro utilizado[1], es la siguiente:

D2 B2 U2 F D2 F' U2 R2 F2 U2 F U' F L D' R' F U' F2 D

Respecto a la notación de las letras de la mezcla, por ejemplo, un U significa "Girar 1 vez la cara U (Cara de color blanco) en sentido horario". Además, los pares de letras con números tal como el D2 significa "Girar 2 veces la cara D (Cara de color amarilla) en sentido horario". Así, se considerarán 2 movimientos en vez de considerarlo como un todo, que es lo que realmente representa. Es decir que se cuentan movimientos en todo el proceso y no, grupos de movimientos, ya que de no ser así representaría una dificultad más para modelizar el problema de programación lineal mediante un único modelo matemático.

Tabla de Notaciones.

Tabla 1. Notaciones para las variables de estudio de la mezcla 1.

Notación	**U**	**D**	**R**	**L**	**B**	**F**
Color	Blanco	Amarillo	Rojo	Naranja	Azul	Verde
Cantidad	8	6	3	1	2	9
Variable	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	**X6**

Esta tabla significa que para esta mezcla presentada, se puede contar la cantidad de giros de cada cara del cubo que implica esa mezcla. Cada cara puede identificarse con un color diferente. Además, cada cara se le asigno una variable entera para armar luego el modelo. De este modo, para esta primer mezcla, U tiene 8 movimientos. Es decir que la cara U de color blanco fue girada 8 veces al terminar de hacer toda la mezcla. D tiene 6 movimientos; es decir, que la cara D de color amarillo fue girada 6 veces al terminar de hacer toda la mezcla; y así sucesivamente.

En este caso, la mezcla tiene un total de 29 movimientos porque hay algunos grupos de movimientos que constan de 2 giros, como ya se explicó.

Se considera que se resuelve el cubo teniendo la capa blanca del cubo hacia arriba porque en torneos oficiales se debe mezclar así todos los cubos para que todos los competidores reciban la misma mezcla y dificultad, y se utiliza el Método Fridrich, ya que es el método más utilizado y eficiente.

2.3 Formalización del Modelo 1

Objetivo: Miminizar movimientos para armar el cubo de Rubik.

Xi= Cantidad de movimientos para cada cara de un color diferente del Cubo de Rubik.

i= 1,2,3,4,5,6.

i= Blanco, Amarillo, Rojo, Anaranjado, aZul, Verde

Función Económica del Modelo 1: Min (Z)= X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6

Sujeto a:

2.4 Restricciones del Modelo 1

R1: X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6 ≥ 27, R1: Cantidad mínima de movimientos de una mezcla oficial (Utilizada en los torneos oficiales de la WCA[3]).

R2: X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6 ≥ 7, R2: Cantidad mínima de movimientos para resolver la primer capa (Cruz).

R3: X2 + X3 + X4 + X5 + X6 ≥ 8, R3: Cantidad mínima total de movimientos para resolver la segunda capa (F2L).

R4: X1 + X4 + X5 ≥ 2, R4: Cantidad mínima de movimientos para resolver el par Blanco, Naranja, Azul.

R5: X1 + X3 + X5 ≥ 2, R5: Cantidad mínima de movimientos para resolver el par Blanco, Rojo, Azul.

R6: X1 + X4 + X6 ≥ 2, R6: Cantidad mínima de movimientos para resolver el par Blanco, Naranja, Verde.

R7: X1 + X3 + X6 ≥ 2, R7: Cantidad mínima de movimientos para resolver el par Blanco, Rojo, Verde.

R8: X2 + X3 + X4 + X5 + X6 ≥ 8, R8: Cantidad mínima de movimientos para resolver la tercer capa (OLL) moviendo Amarillo, Rojo, Naranja, Azul y Verde.

R9: X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6 ≥ 10, R9: Cantidad mínima de movimientos para resolver la segunda parte de tercer capa (PLL).

R10: X1 + X2 ≥ 14, R10: Cantidad mínima de movimientos de la cara Blanca y la cara Amarilla.

R11: X5 + X6 ≥ 11, R11: Cantidad mínima de movimientos de la cara Verde y la cara Azul.

R12: X3 + X4 ≥ 4, R12: Cantidad mínima de movimientos de la cara Rojo y la cara Naranja.

R13: X1 + X6 ≥ 17, R13: Cantidad mínima de movimientos de la cara Blanca y la cara Verde.

R14: X4 + X5 ≥ 3, R14: Cantidad mínima de movimientos de la cara Naranja y la cara Azul.

R15: X2 + X3 ≥ 9, R15: Cantidad mínima de movimientos de la cara Amarilla y la cara Rojo.

R16: X3 + X5 ≥ 5, R16: Cantidad mínima de movimientos de la cara Rojo y la cara Azul.

Xi ≥ 0 , siendo 1≤ i ≤ 6 y enteras, R17: Cantidad mínima de cada cara del Cubo.

3 Método Simplex

En el presente Trabajo para obtener la solución óptima, dentro del Primal, se configuró el software WinQSB para que las variables de solución sean enteras, ya que el modelo planteado implica realizar movimientos por color.

Modelo Simplex de la mezcla 1 en la Figura 1.

Variable -->	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Direction	R. H. S.
Minimize	1	1	1	1	1	1		
C1	1	1	1	1	1	1	>=	27
C2	1	1	1	1	1	1	>=	7
C3	0	1	1	1	1	1	>=	8
C4	1	0	0	1	1	0	>=	2
C5	1	0	1	0	1	0	>=	2
C6	1	0	0	1	0	1	>=	2
C7	1	0	1	0	0	1	>=	2
C8	0	1	1	1	1	1	>=	8
C9	1	1	1	1	1	1	>=	10
C10	1	1	0	0	0	0	>=	14
C11	0	0	0	0	1	1	>=	11
C12	0	0	1	1	0	0	>=	4
C13	1	0	0	0	0	1	>=	17
C14	0	0	0	1	1	0	>=	3
C15	0	1	1	0	0	0	>=	9
C16	0	0	1	0	1	0	>=	5
LowerBound	0	0	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M	M	M		
VariableType	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer		

Fig. 1. Este es el modelo matemático correspondiente a la mezcla 1 de un cubo de Rubik 3x3.

Solución del Modelo Simplex de la mezcla 1 en la Figura 1.

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	8,0000	1,0000	8,0000	0	basic	1,0000	1,0000
2	X2	6,0000	1,0000	6,0000	0	basic	1,0000	1,0000
3	X3	3,0000	1,0000	3,0000	0	basic	1,0000	1,0000
4	X4	1,0000	1,0000	1,0000	0	basic	1,0000	1,0000
5	X5	2,0000	1,0000	2,0000	0	basic	1,0000	3,0000
6	X6	9,0000	1,0000	9,0000	0	basic	0	1,0000
	Objective	Function	(Min.) =	29,0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	29,0000	>=	27,0000	2,0000	0	-M	29,0000
2	C2	29,0000	>=	7,0000	22,0000	0	-M	29,0000
3	C3	21,0000	>=	8,0000	13,0000	0	-M	21,0000
4	C4	11,0000	>=	2,0000	9,0000	0	-M	11,0000
5	C5	13,0000	>=	2,0000	11,0000	0	-M	13,0000
6	C6	18,0000	>=	2,0000	16,0000	0	-M	18,0000
7	C7	20,0000	>=	2,0000	18,0000	0	-M	20,0000
8	C8	21,0000	>=	8,0000	13,0000	0	-M	21,0000
9	C9	29,0000	>=	10,0000	19,0000	0	-M	29,0000
10	C10	14,0000	>=	14,0000	0	1,0000	14,0000	M
11	C11	11,0000	>=	11,0000	0	1,0000	11,0000	M
12	C12	4,0000	>=	4,0000	0	1,0000	4,0000	8,0000
13	C13	17,0000	>=	17,0000	0	0	-M	17,0000
14	C14	3,0000	>=	3,0000	0	0	1,0000	3,0000
15	C15	9,0000	>=	9,0000	0	0	3,0000	9,0000
16	C16	5,0000	>=	5,0000	0	0	1,0000	7,0000

Fig. 2. Esta es la solución única del modelo matemático correspondiente a la mezcla 1 de un cubo de Rubik 3x3.

En todo momento se buscó, en el valor Z, la cantidad de movimientos mínimos que se implique girar al menos una vez todas las caras del cubo y se logre armarlo. Además se puso enfoque en conseguir la eficiencia de cada movimiento para cada cara del cubo respecto a lo que se planteó en las restricciones del modelo (Cantidad mínima de movimientos para resolver la primera y segunda capa; cantidad mínima de movimientos para resolver la tercer capa; etcétera.).

El software de simulación Cube Explorer 5.12 HTM[2] se utilizó inicialmente para conocer las soluciones de menor cantidad de movimientos de la mezcla analizada. Además nos permite saber si la cantidad de movimientos totales que arroja el modelo con programación lineal, resulta en un cubo ordenado.

Así, se pudo corroborar una hipótesis casi intuida. La solución óptima del modelo matemático de la mezcla 1 da Z*= 29 movimientos totales, es decir, que con esa cantidad de movimientos, en el orden adecuado, se logra armar el cubo. Con ese valor óptimo obtenido, se concluyó que se trata de la secuencia inversa de la mezcla aplicada sobre el cubo. Se la llama inversa porque al aplicar una secuencia sobre el cubo y luego aplicar su inversa, el cubo queda igual de armado.

Nuestro modelo arroja, como solución, la cantidad de cada tipo de movimiento que se debe realizar para lograr un cubo ordenado. Esto se obtiene sin especificar el orden en que deben realizarse dichos movimientos ya que esto excede a la programación lineal. Para conocer el orden de los movimientos es necesario aplicar simulación como ya se explicó.

Básicamente, se buscaba conocer la respuesta al problema aplicando simulación y luego corroborando mediante la programación lineal que también es posible llegar a las mismas conclusiones.

Todos los modelos que se pueden plantear van a estar ligados propiamente a la mezcla que representen, dando un resultado óptimo de la cantidad de movimientos de la mezcla inversa, ya que no se logró obtener un modelo genérico que resuelva todas las 43 252 003 274 489 856 000 mezclas posibles[5].

En conclusión, se intentó como Trabajo de Cátedra aplicar los temas de la Investigación Operativa y relacionarlos con otra disciplina como la Simulación con el objetivo de corroborar que se puede solucionar un problema real mediante la combinación de las herramientas que brindan ambas disciplinas.

3 Otros ejemplos de mezclas

Aquí se presentan otros modelos de distintas mezclas de los cuales obtuvimos también, siguiendo el mismo procedimiento del Modelo 1, que la solución óptima es la secuencia inversa a la mezcla correspondiente.

3.1 Condiciones del Modelo 2

La **mezcla 2**, generada por el cronometro utilizado[1], es la siguiente:

R2 B2 U' F2 D' F2 R2 U F2 R2 D' R' B R B D B F D R'

En este caso, la mezcla tiene un total de 27 movimientos porque hay algunos grupos de movimientos que constan de 2 giros.

Tabla de Notaciones.

Tabla 2. Notaciones para las variables de estudio de la mezcla 2.

Notación	**U**	**D**	**R**	**L**	**B**	**F**
Color	Blanco	Amarillo	Rojo	Naranja	Azul	Verde
Cantidad	2	4	9	0	5	7
Variable	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	**X6**

3.2 Formalización del Modelo 2

Objetivo: Miminizar movimientos para armar el cubo de Rubik.

Xi= Cantidad de movimientos para cada cara de un color diferente del Cubo de Rubik.

i= 1,2,3,4,5,6.

i= Blanco, Amarillo, Rojo, Anaranjado, aZul, Verde

Función Económica del Modelo 2: Min (Z)= X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6

Sujeto a:

3.3 Restricciones del Modelo 2

Se repiten las restricciones R1 a R9 del Modelo 1 anteriormente presentado.

A pesar de que estas restricciones se repiten en cada modelo, son importantes para el modelo ya que representan las restricciones que impone el método Fridrich y abarcan todos los posibles algoritmos del F2L, OLL y PLL (Se consideró el más largo en su longitud para cada paso del método Fridrich). Bajo ningún concepto, se debe tener en cuenta que todas las restricciones no son necesarias para modelizar una situación ya que se trata de eso una modelización de una problemática de la realidad. Se busca simplificar algo, dentro de lo posible, para poder modelizarlo y resolverlo matemáticamente.

R10: $X1 + X2 \geq 6$, R10: Cantidad mínima de movimientos de la cara Blanca y la cara Amarilla.

R11: $X5 + X6 \geq 12$, R11: Cantidad mínima de movimientos de la cara Verde y la cara Azul.

R12: $X3 + X4 \geq 9$, R12: Cantidad mínima de movimientos de la cara Rojo y la cara Naranja.

R13: $X1 + X6 \geq 9$, R13: Cantidad mínima de movimientos de la cara Blanca y la cara Verde.

R14: $X4 + X5 \geq 5$, R14: Cantidad mínima de movimientos de la cara Naranja y la cara Azul.

R15: $X2 + X3 \geq 15$, R15: Cantidad mínima de movimientos de la cara Amarilla y la cara Rojo.

R16: $X3 + X5 \geq 14$, R16: Cantidad mínima de movimientos de la cara Rojo y la cara Azul.

$Xi \geq 0$, siendo $1 \leq i \leq 6$ y enteras, R17: Cantidad mínima de cada cara del Cubo.

3.4 Condiciones del Modelo 3

La **mezcla 3**, generada por el cronometro utilizado[1], es la siguiente:

F U' L2 U L2 U L2 U' R2 F2 R2 U2 L' D2 F2 D' R B2 D' F

En este caso, la mezcla tiene un total de 30 movimientos porque hay algunos grupos de movimientos que constan de 2 giros.

Tabla de Notaciones.

Tabla 3. Notaciones para las variables de estudio de la mezcla 3.

Notación	**U**	**D**	**R**	**L**	**B**	**F**
Color	Blanco	Amarillo	Rojo	Naranja	Azul	Verde
Cantidad	6	4	5	7	2	6
Variable	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	**X6**

3.5 Formalización del Modelo 3

Objetivo: Miminizar movimientos para armar el cubo de Rubik.

Xi= Cantidad de movimientos para cada cara de un color diferente del Cubo de Rubik.

i= 1,2,3,4,5,6.

i= Blanco, Amarillo, Rojo, Anaranjado, aZul, Verde

Función Económica del Modelo 3: Min (Z)= X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6

Sujeto a:

3.6 Restricciones del Modelo 3

Se repiten las restricciones R1 a R9 del Modelo 1 anteriormente presentado.

R10: X1 + X2 ≥ 10, R10: Cantidad mínima de movimientos de la cara Blanca y la cara Amarilla.

R11: X5 + X6 ≥ 8, R11: Cantidad mínima de movimientos de la cara Verde y la cara Azul.

R12: X3 + X4 ≥ 12, R12: Cantidad mínima de movimientos de la cara Rojo y la cara Naranja.

R13: X1 + X6 ≥ 12, R13: Cantidad mínima de movimientos de la cara Blanca y la cara Verde.

R14: X4 + X5 ≥ 9, R14: Cantidad mínima de movimientos de la cara Naranja y la cara Azul.

R15: X2 + X3 ≥ 9, R15: Cantidad mínima de movimientos de la cara Amarilla y la cara Rojo.

R16: X3 + X5 ≥ 7, R16: Cantidad mínima de movimientos de la cara Rojo y la cara Azul.

Xi ≥ 0 , siendo 1≤ i ≤ 6 y enteras, R17: Cantidad mínima de cada cara del Cubo.

Referencias

1. “Cstimer”. Cronometro y generador de mezclas oficiales. Recuperado 6 de Marzo de 2015 de http://cstimer.net/timer.php
2. “Cube Explorer 5.12 HTM”. Versión 5.12 HTM. H. Kociemba 2014. Programa de simulación para la resolución optimizada del Cubo de Rubik.
3. “WinQSB”. Versión 2.00. Yih-Long Chang. Sistema interactivo de ayuda a la toma de decisiones que contiene herramientas para resolver distintos tipos de problemas en el campo de la investigación operativa.
4. “World Cube Association”. Recuperado 6 de Marzo de 2015 de https://www.worldcubeassociation.org/
5. “Cubo de Rubik”. Wikipedia. Recuperado 6 de Marzo de 2015 de https://es.wikipedia.org/wiki/Cubo_de_Rubik
6. “Move Counts”. Speedsolving Puzzle Forum. Se trata de un thread en donde Jeff Plumb (Id en la WCA 2014PLUM01) comprueba mediante varias queries que toda mezcla oficial tiene una longitud promedio de 19,33 grupos de movimientos. Recuperado 6 de Marzo de 2015 de http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:KudutNgTbdEJ:https://www.speedsolving.com/forum/showthread.php%3F52290-Move-Counts-From-TNoodle-Scrambles+&cd=1&hl=es&ct=clnk&gl=ar
7. “¿Qué es la Investigación Operativa?”. PHPSimplex. Recuperado 6 de Marzo de 2015 de http://www.phpsimplex.com/investigacion_operativa.htm
8. “#MoYu 13×13 Primary Color”. Pagina Oficial de YJ Moyu en la red social Facebook. Se puede ver fotos reales del mayor cubo en color primario lanzado de la compañía. Recuperado 25 de Junio de 2015 de https://www.facebook.com/yjmoyu/posts/448799505274001